

L'ANALYSE MATRICIELLE DES RESEAUX DE POUTRES CROISEES ET SON EXTENSION AU CALCUL AUTOMATIQUE DES DALLES

Par

B. TILIOUINE

Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique (ENP - Alger)

D. SAIS

Maître Assistant à l'Ecole Nationale Polytechnique (ENP - Alger)

A. HAMMAL

Ingénieur d'Etat à l'Ecole Nationale Polytechnique (ENP - Alger)

Résumé

L'analyse matricielle du comportement des ossatures en réseaux de poutres croisées et son extension au calcul automatique des dalles sont présentées.

Une formulation mixte intégrant les développements analytiques de la méthode des raideurs et de la théorie des équivalences est utilisée. Un bref examen de la littérature spécialisée et les applications potentielles de la méthode sont d'abord discutés. Les développements analytiques suivis par une brève description du logiciel élaboré sont ensuite exposés.

Aux fins d'illustrer la validité et la versatilité de la méthode, deux applications numériques sont considérées. Les résultats obtenus sont successivement confrontés avec ceux déduits de la théorie des plaques et de la méthode des éléments finis démontrant ainsi l'efficacité de la méthode pour une détermination rapide des éléments de réduction d'une part et de sa précision ainsi que de son taux de convergence d'autre part.

Mots clés : réseau de poutres - dalle - méthode des vecteurs - méthode des équivalences.

1 INTRODUCTION

Les besoins pressants des secteurs des travaux publics conjugués au développement des techniques routières conduisent à la construction sans cesse croissante d'ouvrages d'art constitués de grillages de poutres. Ces grillages (désignés aussi sous le vocable anglo-saxon

de "grids") sont représentés par des réseaux de poutres assemblées rigidement aux noeuds, se croisant entre elles selon des angles quelconques, souvent droits tels que ceux observés ordinairement en pratique.

De tels systèmes constructifs sont soumis en général simultanément à l'action de chargements extérieurs, normaux à leur plan moyen et à des vecteurs couples de direction parallèle à ce plan. L'interaction transversale ou en d'autres termes la répartition transversale des chargements sur l'ensemble des poutres maîtresses permet d'atteindre de grandes portées et d'obtenir des solutions économiques d'autant plus significatives que la liaison longerons-entretoises est plus rigide. Evidemment la transmission des chargements extérieurs en flexion et en torsion sera d'autant plus effective que le réseau sera solidaire d'une dalle.

Le problème de calcul des réseaux de poutres croisées a suscité dès l'origine l'attention particulière des chercheurs non seulement en raison de sa complexité et de son degré élevé d'hyperstaticité mais aussi et surtout en raison de ses nombreuses et diverses applications.

Un examen des travaux publiés dans la littérature spécialisée montre que les méthodes de calcul ont considérablement évolué depuis les travaux théoriques fondamentaux de Hetenyi [1] et Guyon [2] basés essentiellement sur l'hypothèse de rigidités torsionnelles négligeables. Les méthodes de calcul prenant en considération ces dernières en se basant sur la théorie des plaques orthotropes et la méthode des coefficients de répartition ont été développées par Massonnet [3] et puis étendues plus tard par Bares [4] pour un coefficient de Poisson de valeur différente de zéro.

Un regain d'intérêt notable s'est produit dans les années soixante avec l'apparition des techniques modernes de calcul promues à un développement rapide grâce à l'essor de moyens informatiques de plus en plus performants. Pestel [5] proposa une extension de la méthode d'idéalisation des plaques minces et coques plates par la théorie des équivalences proposée initialement par Hrennikoff [6].

Salonen [7] présenta une technique d'analyse flexionnelle des plaques minces en utilisant la théorie des réseaux de poutres croisées. Absi [8] développa plusieurs modèles de configuration géométrique différente de la théorie des équivalences en se basant sur des critères énergétiques. D'autres configurations d'éléments ont été également présentées par Yettram et Mc Kinnon [9] en employant des critères de compatibilité de déformation.

Le présent article a pour objet de présenter une méthode mixte, aussi simple et précise que possible de calcul des réseaux de poutres croisées, compte tenu de leurs rigidités torsionnelles. L'extension de la méthode au calcul automatique des dalles est examinée via la théorie des équivalences.

Les applications de la méthode sont multiples et concernent une gamme étendue de systèmes constructifs et ouvrages d'art tels que les systèmes de fondations, couverture de grandes surfaces, planchers industriels, ponts à poutres multiples avec ou sans effet de platelage, ponts biais et ponts à précontrainte transversale, etc.

2 FORMULATION DU PROBLEME

Les étapes principales de résolution du problème sont décrites en détail ci-après. Elles consistent en une décomposition systématique du problème selon une série d'opérations hiérarchiquement effectuées comme suit :

- ◆ Définition du problème (calcul automatique de poutres croisées ou de dalles).
- ◆ Introduction des données géométriques et mécaniques.
- ◆ Formation de la matrice des raideurs élémentaires directement dans le système d'axes global.
- ◆ Assemblage de la matrice des raideurs globales.
- ◆ Détermination du vecteur chargement extérieur.
- ◆ Résolution du système d'équations linéaires.
- ◆ Evaluation des réactions.
- ◆ Détermination des éléments de réduction dans le repère local.

La matrice des raideurs élémentaire $[K^E]$ dans le système de coordonnées locales (Figure 1) s'écrit :

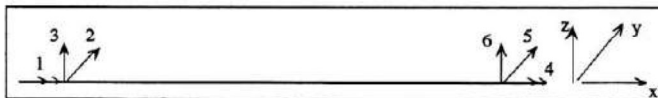


Figure 1 : Système de coordonnées locales.

$$[K^E] = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_Y}{L} & \frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & \frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI_Y}{L} & -\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_Y}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & -\frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & \frac{12EI_Y}{L^3} \end{bmatrix} \quad \text{SYMETRIQUE}$$

Elle peut être interprétée comme le résultat de la combinaison de l'effet d'un élément poutre en flexion auquel a été superposé l'effet de torsion, dont les termes génériques de la matrice des raideurs peuvent être déterminés directement à partir de l'expression suivante déduite de l'application du théorème des travaux virtuels [10] :

$$K_{ij}^E = \int_0^L GJ \theta_j'(x) \theta_i'(x) dx \quad \begin{matrix} i=1 \text{ ou } 4 \\ j=1 \text{ ou } 4 \end{matrix}$$

θ_i' et θ_j' représentent les dérivées premières calculées pour les valeurs particulières des indices i et j à partir des fonctions de forme angulaires :

$$\theta_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad \text{et} \quad \theta_4(x) = \frac{x}{L}$$

E, G : modules d'élasticité longitudinale et transversale, respectivement.

L, I_y : longueur de l'élément et inertie de flexion par rapport à l'axe y , respectivement.

J : constante de torsion de Saint Venant (identique au moment d'inertie polaire pour les sections circulaires).

On en déduit directement l'expression analytique de la matrice des raideurs élémentaire dans le repère global $[K_G^E]$ à l'aide de la matrice de transformation $[R_T]$ dont la transposée est égale à sa matrice inverse $[R_T]^{-1}$

$$[K_G^E] = [R_T]^{-1} [K^E] [R_T]$$

Le processus d'assemblage consiste à combiner systématiquement les matrices de raideurs élémentaires et les affecter aux positions correspondantes de la matrice des raideurs globale $[K^G]$ qui peut être réarrangée sous la forme suivante :

$$[K^G] = \begin{bmatrix} [K] & [K_{DR}] \\ [K_{RD}] & [K_{RR}] \end{bmatrix}$$

La sous-matrice $[K]$ représente la matrice des raideurs associées aux déplacements libres.

La sous matrice $[K_{RD}]$ est généralement rectangulaire ; elle contient les raideurs correspondantes aux degrés de liberté bloqués causés par les déplacements des degrés de liberté initialement libres.

La sous matrice $[K_{DR}]$ est la transposée de $[K_{RD}]$.

La sous matrice $[K_{RR}]$ correspond aux réactions associées aux degrés de liberté initialement bloqués et causées par un déplacement unitaire de ces degrés de liberté.

Le vecteur chargement extérieur $\{A\}$ est obtenu en combinant les charges appliquées aux nœuds et celles sur les éléments.

Le vecteur déplacement libre $\{D\}$ contenant les inconnues primaires du problème peut être obtenu par résolution des équations linéaires d'équilibre statique :

$$[K] \{D\} = \{A\}$$

Les réactions sont données par :

$$\{R\} = \{R^*\} + [K_{RD}] \{D\}$$

où $\{R^*\}$ représente les réactions de la structure sans déformation.

De manière analogue, les efforts internes sont déterminés par la superposition de deux états d'équilibre : un état d'équilibre sous chargement sans déformation et un état d'équilibre correspondant à des déformations sans chargement.

$$\{A_H\}_i = \{A_b\}_i + [K_e]_i [R_T]_i \{D\}_i$$

où le vecteur $\{A_H\}_i$ contient les éléments de réduction aux extrémités de l'élément "i" et le vecteur $\{A_b\}_i$ représente les éléments de réduction de cet élément considéré bi-encasté.

3 DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES DES DALLES EQUIVALENTES

L'application du logiciel développé, à l'analyse flexionnelle du comportement des milieux continus plans, conduit à adopter un réseau de poutres équivalent dont les caractéristiques seront évaluées par la théorie des équivalences. Celle-ci [7] constitue une approche générale permettant de substituer à l'étude d'un corps réel chargé, celle d'un autre corps fictif plus accessible au calcul. Ce corps fictif peut avoir des caractéristiques et des lois de comportement n'ayant pas nécessairement une réalité physique.

A cet effet, considérons une dalle de plan moyen (x, y) et d'épaisseur h . L'énergie de déformation par unité de surface est :

$$U_o = \frac{1}{2} D \left\{ \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right]^2 + \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right]^2 + 2v \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 2(1-v) \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right]^2 \right\} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} D \left\{ \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right]^2 + \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right]^2 + 2v \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right] - \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right]^2 \right\}$$

où la rigidité flexionnelle, D , de la dalle est donnée par :

$$D = \frac{E h^3}{12 (1-v^2)}$$

h et v désignant respectivement l'épaisseur de la dalle et le coefficient de Poisson.

Dans l'hypothèse des petites déformations la théorie classique des plaques minces néglige les efforts de membrane impliquant :

$$\left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right]^2 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \cong 0 \quad (2)$$

L'équation (1) devient alors :

$$U_o = \frac{1}{2} D \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right]^2 + \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right]^2 \quad (3)$$

Considérons maintenant les énergies de flexion et de torsion d'une poutre de faible longueur l , liée à un système de référence propre (x, y) . Le moment de flexion en fonction de la déformée ω est donné par :

$$M_f = E I \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (4)$$

L'énergie de flexion s'écrit :

$$W_f = \frac{1}{2} M_f \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} l = \frac{1}{2} E I l \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right]^2 \quad (5)$$

En écrivant W_f dans le système d'axes global (x, y) , on obtient :

$$W_f = \frac{1}{2} \rho \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \right] \quad (6)$$

$$\rho = E I l \quad (7)$$

Par ailleurs, le moment de torsion M_t a pour expression :

$$M_t = G J \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \quad (8)$$

L'énergie de torsion est donnée par :

$$W_t = \frac{1}{2} G J M_t \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} l = \frac{1}{2} G J l \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right]^2 \quad (9)$$

En écrivant, W_t dans le système d'axes global (x, y) , on obtient :

$$W_t = \frac{1}{2} \gamma \left[\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right] \sin 2\alpha + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha \right]^2 \quad (10)$$

$$\text{où } \gamma = G J I \quad (11)$$

En supposant le grillage disposé parallèlement au système de référence (x, y) et en égalisant les énergies de déformations totales, on peut écrire finalement :

$$W = A U_o = (W_f + W_t)_{ij} + (W_f + W_t)_{lk} \quad (12)$$

où W désigne l'énergie totale de déformation de l'élément de la dalle considérée et A, l'aire de cet élément.

Ou encore

$$AD \left[\left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right]^2 + \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right]^2 \right] \quad (13)$$

$$= \rho_{ij} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right]^2 + \rho_{lk} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right]^2 + [\gamma_{ij} + \gamma_{kl}] \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right]^2$$

d'où par identification :

$$\rho_{ij} = \rho_{kl} = \frac{1}{2} (\gamma_{ij} + \gamma_{kl}) = AD \quad (14)$$

Les relations (14) donnent les caractéristiques du réseau de poutres équivalent à une dalle permettant ainsi de traiter des dalles de dimensions quelconques avec des conditions d'appuis diverses.

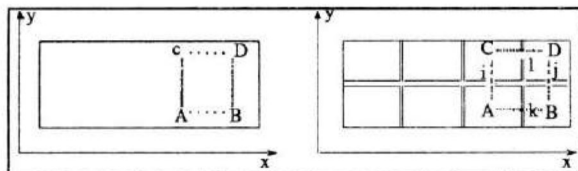


Figure 2 : Substitution de la dalle à un réseau de poutres.

4 MODULES DU LOGICIEL ELABORE

Le logiciel C.S.R.P.C. (Calcul Statique des Réseaux de Poutres Croisées) est composé de quatre modules réalisant les tâches primaires suivantes :

DATSTR :

- ❖ Lecture, modification et vérification des données. Deux options sont proposées : soit un calcul de réseaux de poutres croisées soit un calcul de dalles dont les caractéristiques équivalentes seront déterminées automatiquement.

ASSMAT :

- ❖ Formation des matrices des raideurs élémentaires, réarrangement, assemblage et stockage demi-bande de la matrice globale des raideurs.

- ❖ Construction et assemblage des vecteurs charge-ments extérieurs.

RESOLV :

- ❖ Résolution de systèmes d'équations linéaires par l'algorithme de Gauss modifié en vue d'un traitement efficace de matrices stockées en demi-bande.

EFFORT :

- ❖ Détermination des réactions des supports et des efforts internes aux extrémités de chaque élément.

5 APPLICATIONS NUMERIQUES

Application 1 : Influence de la rigidité torsionnelle.

Un formulaire souvent utilisé dans les bureaux d'études pour le calcul des réseaux de poutres croisées est l'aide-mémoire de résistance des matériaux de J. Goulet [11]. Les restrictions de ce formulaire sont plutôt nombreuses, en particulier :

- ✓ Choix limité des conditions d'appuis et du maillage.
- ✓ Rapport des dimensions des panneaux (mailles) fixes.
- ✓ Rigidité EI constante.
- ✓ Réseaux orthogonaux seulement.
- ✓ Résultats donnés en quelques nœuds.
- ✓ Chargements extérieurs concentrés aux nœuds seulement.
- ✓ Effet de torsion négligé.

Le logiciel proposé comble l'ensemble de ces restrictions en donnant notamment les déplacements et les éléments de réduction en n'importe quel point compte tenu de rigidités flexionnelles et torsionnelles variables, d'orientations quelconques des éléments structuraux et de chargements extérieurs généralisés à des éléments quelconques.

En ce qui concerne l'étude de l'incidence de l'effet de torsion, l'analyse de plusieurs cas d'espèce sous chargement symétrique appelle les observations suivantes :

- Les éléments ne subissant pas de déformations torsionnelles sont soumis à un moment de flexion pratiquement égal à celui proposé par le formulaire.
- La prise en compte des rigidités torsionnelles des éléments structuraux permet de conclure, que dans certains cas, il est possible de réduire de 40% les moments de flexion estimés à partir du formulaire. Ceci souligne clairement l'intérêt de la méthode de calcul suggérée.

Application 2 : Calcul du déplacement au centre d'une dalle carrée.

Afin d'illustrer l'applicabilité de la méthode au cal-

cul des dalles, considérons une dalle isotrope, encastree aux bords, chargée uniformément (q) sur toute sa surface (L^2) et déterminons le déplacement de son centre qui se réduit à la seule composante verticale :

$$\omega_{\max} = \alpha q L^4/D$$

Ce problème présentant une symétrie de géométrie et de chargement, seul le quart de la dalle est analysé.

Les résultats obtenus par application de la présente méthode sont comparés systématiquement aux résultats analytiques "exacts" et à ceux déduits de la méthode des éléments finis [12] .

Les résultats finaux sont présentés dans le tableau et schématisés dans l'histogramme (Figure 3) suivants :

Maillage	Solution "exacte" α	Solution proposée C.S.R.P.C. α	% d'erreur relative/ sol. exacte	Solution éléments finis α	% d'erreur relative/ sol. exacte
2x2	0.00126	0.0013205	4.80	0.001480	17.16
4x4	0.00126	0.0013021	3.34	0.001403	11.35
8x8	0.00126	0.0012938	2.68	0.001304	3.49
12x12	0.00126	0.0012832	1.84	0.001283	1.83
16x16	0.00126	0.0012779	1.41	0.001275	1.12

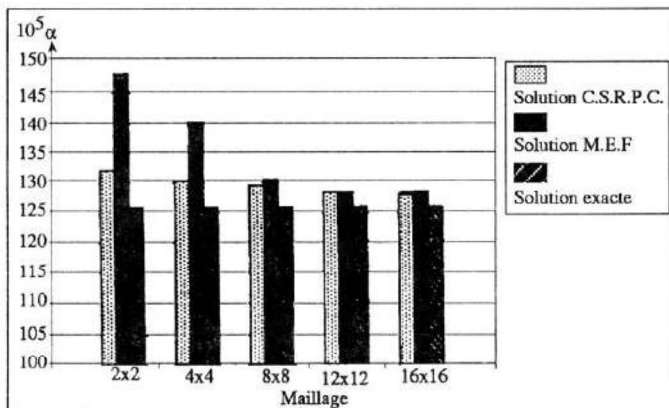


Figure 3 : Déplacement vertical du centre d'une dalle.

6 CONCLUSION

Une méthode mixte de calcul automatique des structures en réseaux de poutres croisées est présentée. Cette méthode incorpore avantageusement les formalismes de la méthode des raideurs et de la théorie des équivalences en vue de leur utilisation pour le calcul des milieux continus plans présentant diverses conditions d'appuis.

La méthode suggérée prédit des résultats en excellente concordance avec la solution analytique exacte lorsque celle-ci est disponible. Comparée à la méthode des éléments finis, la méthode proposée converge plus rapidement. A titre d'exemple, le maillage 2x2 utilisé précédemment conduit à une erreur relative de l'ordre de 4.8% par rapport à la solution exacte contre plus de 17.16% pour une analyse par la méthode des éléments finis employant un maillage identique.

Le succès de la méthode réside essentiellement

dans sa capacité à simuler le comportement d'un problème bidimensionnel par un élément monodimensionnel. Elle ouvre la voie à d'intéressantes perspectives pour une solution économique du problème des plaques épaisses moyennant quelques modifications mineures dans la formulation du problème ①

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Hetenyi : "A method of calculating grillages beams". S. Timoshenko 60th Anniversary Volume, New York, U.S.A., 1938.
- [2] Y. Guyon : "Calcul des ponts larges à poutres multiples solidarisiées par des entretoises". Annales des Ponts et Chaussées de France, N°9, France, 1946.
- [3] C. Massonnet : "Contribution au calcul des ponts à poutres multiples tenant compte de leur résistance à la torsion". Mémoires A.I.P.C., 1966.
- [4] R. Bares, C. Massonnet : "Le Calcul des grillages de poutres et dalles orthotropes". S.N.T.L, Maison d'Édition Technique, Prague, Tchécoslovaquie, 1966.
- [5] E. Pestel : "Investigation of plate and shell models by matrices". Office of Aerospace Research, United States Air Force, Brussels, Belgium, 1963.
- [6] A. Hrennikoff : "Solution to problems by the framework method". Journal of Applied Mechanics, American Society of Mechanical Engineers, Vol 68, USA, 1941.
- [7] E.M. Salonen : "A gridwork method for plates in bending". Acta Polytechnica Scandinavica, N° Ci 59, The Finish Academy of Technical Sciences, Helsinki, Finland, 1969.
- [8] E. Absi : "La Théorie des équivalences et son application à l'étude des ouvrages d'art". Annales de I.B.T.P, supplément N°298. Paris, France, 1972.
- [9] A.L. Yettram, V. Mc Kinnon : "Grid framework method for thick plates in flexure". Journal of the engineering mechanics division, A.S.C.E, Vol. 100, N° EM 5, USA, 1974.
- [10] B. Tiliouine : "Notes de cours de dynamique des structures". Post-graduation, Département de Génie Civil, Ecole Nationale Polytechnique, Algérie, 1982.
- [11] J. Goulet : "Aide mémoire de résistance des matériaux". Edition Dunod, Paris, France, 1979.
- [12] O.C. Zienkiewicz : "La méthode des éléments finis". McGraw-Hill, Paris, France, 1979.